Effiziente Berechnung von Kopplungen auf Orbifolds

Interdisziplinäres Projekt (IDP) zwischen Informatik und Physik

Martin von Gagern

Fakultät für Informatik

28. September 2007

Gliederung

- Aufgabenstellung
  - Darstellung des Problems
  - Crashkurs Komplexitätstheorie
- Lösungskonzepte
  - Ganzzahlige Optimierung
  - Gescheiterte Lösungsansätze
- Implementierung der Lösung
  - Formulierung als IP
  - Aufzählen aller Lösungen

Physikalische Aufgabenstellung

Was soll eigentlich berechnet werden?

- Stringtheorie
- Orbifold-Kompaktifizierung
- Zustände charakterisiert durch Quantenzahlen
  $|\psi\rangle \quad \leftrightarrow \quad \{k, n_1, \ldots n_6, q_\gamma, R_1, R_2, R_3, p_1, \ldots p_{16}\}$
- Kopplungen zwischen Zuständen
  $\left|\psi^{(a)}\right\rangle \quad (1 \leq a \leq A)$
- Auswahlregeln: Gleichungen über Quantenzahlen

$$\sum_a^A p_I^{(a)} = 0$$

$$\sum_a^A k^{(a)} n_i^{(a)} = 0 \pmod{\nu_i}$$

$$\sum_a^A R_i^{(a)} = -1 \pmod{\rho_i}$$

Mathematische Abstraktion

Was ist die allgemeine Form des Problems?

- Multimenge von Zuständen $\rightarrow$ Vektor ihrer Anzahl
- Vorerst Vernachlässigung der Modulo-Arithmetik
- Ergebnis: diophantisches lineares Gleichungssystem

Integer Programming (Gleichungsformulierung)

Eingabe:
Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$
und Zielvektor $b \in \mathbb{Z}^m$

Fragestellung:
Gibt es ein $x \in \mathbb{N}^n$
so dass $Ax = b$?

Crashkurs Komplexitätstheorie

NP-vollständig – was ist das?

Klasse P:	Polynomialzeit $t(n) \leq c \cdot n^k$ für große n
Klasse NP:	Nichtdeterministische Polynomialzeit Hypothetisches Modell mit Orakel
NP-vollständig:	allgemeine Probleme in NP
P = NP?	Ungelöstes Problem der Informatik

Integer Programming ist NP-vollständig.

Integer Programming

Wie sieht die typische Formulierung davon aus?

Integer Programming (Optimierungsproblem)

Eingabe:
Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$,
Schranken $b \in \mathbb{Z}^m$
und Zielfunktion $c \in \mathbb{Z}^n$

Fragestellung:
Finde $x \in \mathbb{N}^n$
so dass $Ax \leq b$
und $c^T x$ maximal.

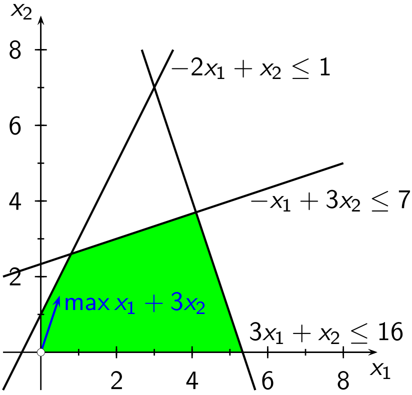
Gleichungssystem und Ungleichungssystem
im Wesentlichen äquivalent:

- Gleichung = zwei Ungleichungen
- Ungleichung = Gleichung + zusätzliche Variable

Konzepte der ganzzahligen Optimierung

Wie finde ich die beste ganzzahlige Lösung?

LP-Relaxation:	Simplex-Algorithmus
Cut:	Einfügen von Schnittebenen
Branch:	Verzweigung ergibt Suchbaum
Bound:	Gefundene Lösungen schränken Suchraum ein



$$\max \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

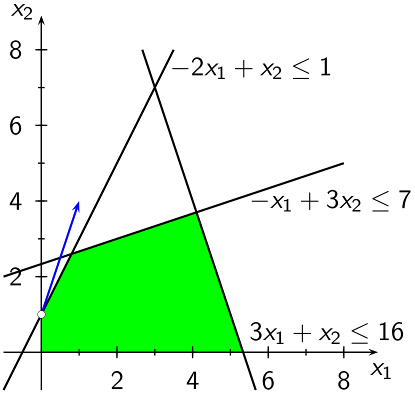
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Konzepte der ganzzahligen Optimierung

Wie finde ich die beste ganzzahlige Lösung?

LP-Relaxation:	Simplex-Algorithmus
Cut:	Einfügen von Schnittebenen
Branch:	Verzweigung ergibt Suchbaum
Bound:	Gefundene Lösungen schränken Suchraum ein



$$\max \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

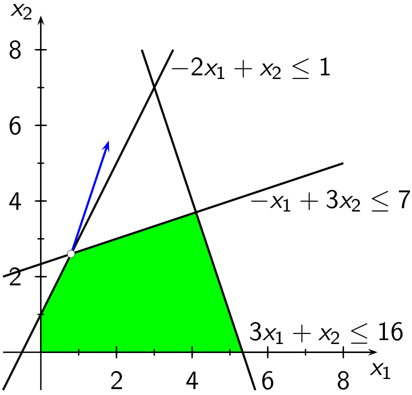
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Konzepte der ganzzahligen Optimierung

Wie finde ich die beste ganzzahlige Lösung?

LP-Relaxation:	Simplex-Algorithmus
Cut:	Einfügen von Schnittebenen
Branch:	Verzweigung ergibt Suchbaum
Bound:	Gefundene Lösungen schränken Suchraum ein



$$\max \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

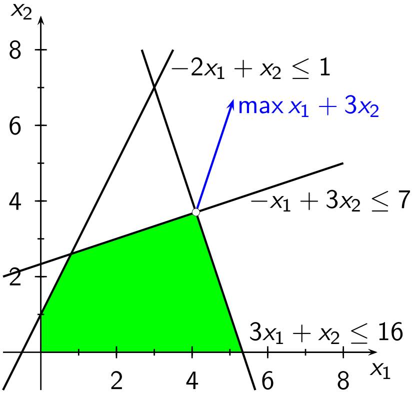
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Konzepte der ganzzahligen Optimierung

Wie finde ich die beste ganzzahlige Lösung?

LP-Relaxation:	Simplex-Algorithmus
Cut:	Einfügen von Schnittebenen
Branch:	Verzweigung ergibt Suchbaum
Bound:	Gefundene Lösungen schränken Suchraum ein



$$\max \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

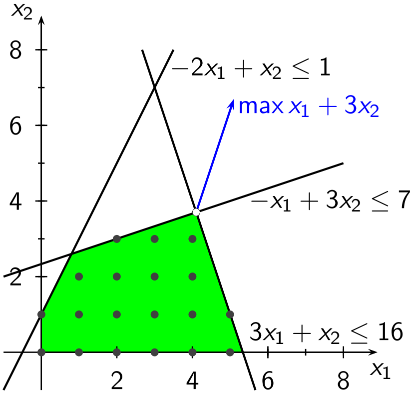
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Konzepte der ganzzahligen Optimierung

Wie finde ich die beste ganzzahlige Lösung?

LP-Relaxation:	Simplex-Algorithmus
Cut:	Einfügen von Schnittebenen
Branch:	Verzweigung ergibt Suchbaum
Bound:	Gefundene Lösungen schränken Suchraum ein



$$\max \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

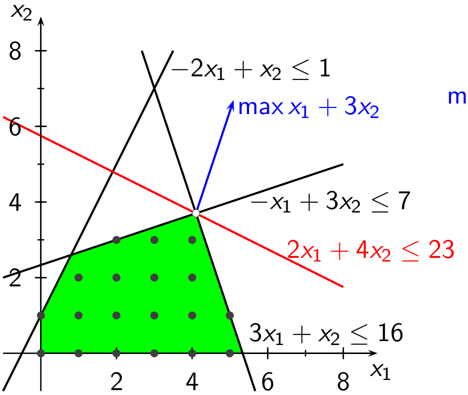
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Konzepte der ganzzahligen Optimierung

Wie finde ich die beste ganzzahlige Lösung?

- **LP-Relaxation:** Simplex-Algorithmus
- **Cut:** Einfügen von Schnittebenen
- **Branch:** Verzweigung ergibt Suchbaum
- **Bound:** Gefundene Lösungen schränken Suchraum ein



$$\max \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

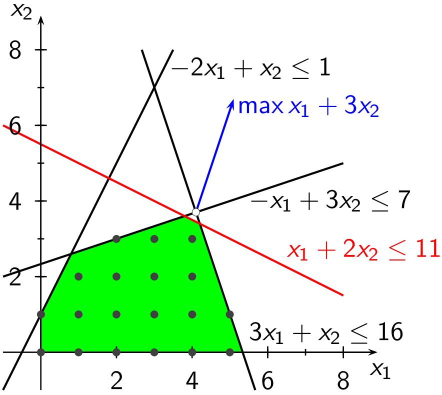
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 16 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Konzepte der ganzzahligen Optimierung

Wie finde ich die beste ganzzahlige Lösung?

LP-Relaxation:	Simplex-Algorithmus
Cut:	Einfügen von Schnittebenen
Branch:	Verzweigung ergibt Suchbaum
Bound:	Gefundene Lösungen schränken Suchraum ein



$$\max \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

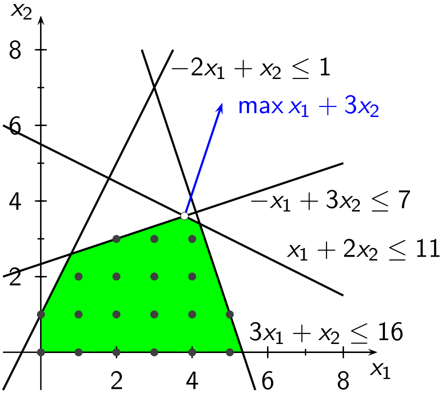
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Konzepte der ganzzahligen Optimierung

Wie finde ich die beste ganzzahlige Lösung?

- **LP-Relaxation:** Simplex-Algorithmus
- **Cut:** Einfügen von Schnittebenen
- **Branch:** Verzweigung ergibt Suchbaum
- **Bound:** Gefundene Lösungen schränken Suchraum ein



$$\max \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

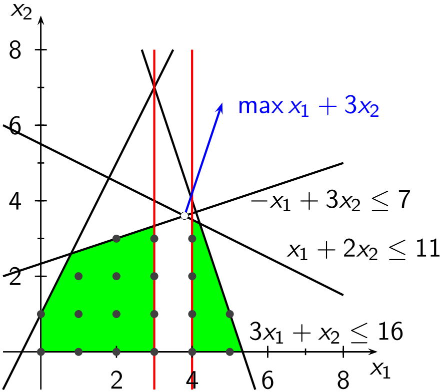
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Konzepte der ganzzahligen Optimierung

Wie finde ich die beste ganzzahlige Lösung?

- **LP-Relaxation:** Simplex-Algorithmus
- **Cut:** Einfügen von Schnittebenen
- **Branch:** Verzweigung ergibt Suchbaum
- **Bound:** Gefundene Lösungen schränken Suchraum ein



$$\max \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

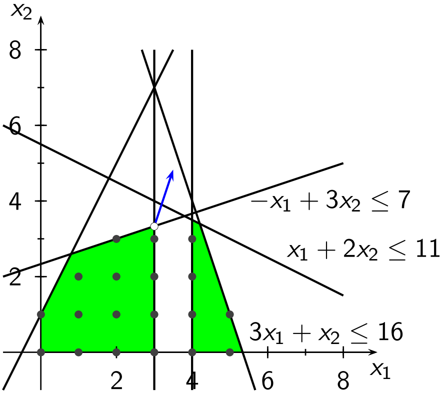
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Konzepte der ganzzahligen Optimierung

Wie finde ich die beste ganzzahlige Lösung?

LP-Relaxation:	Simplex-Algorithmus
Cut:	Einfügen von Schnittebenen
Branch:	Verzweigung ergibt Suchbaum
Bound:	Gefundene Lösungen schränken Suchraum ein



$$\max \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

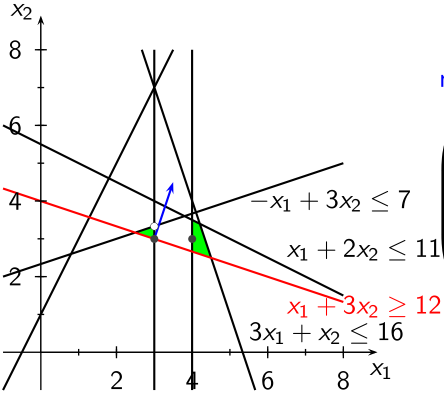
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Konzepte der ganzzahligen Optimierung

Wie finde ich die beste ganzzahlige Lösung?

- **LP-Relaxation:** Simplex-Algorithmus
- **Cut:** Einfügen von Schnittebenen
- **Branch:** Verzweigung ergibt Suchbaum
- **Bound:** Gefundene Lösungen schränken Suchraum ein



$$\max \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 16 \\ 11 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Konzepte der ganzzahligen Optimierung

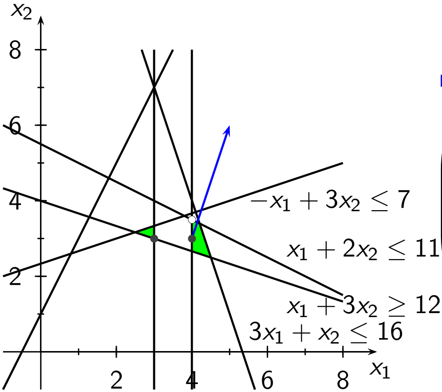
Wie finde ich die beste ganzzahlige Lösung?

LP-Relaxation: Simplex-Algorithmus

Cut: Einfügen von Schnittebenen

Branch: Verzweigung ergibt Suchbaum

Bound: Gefundene Lösungen schränken Suchraum ein



$$\max \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 16 \\ 11 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gescheiterte Lösungsansätze

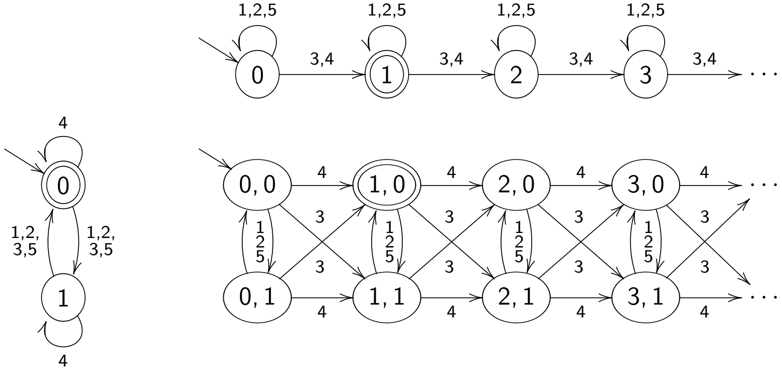
Was hat alles nicht funktioniert?

1. Endliche Automaten
2. Basisreduktion
3. Modifikation bestehender Branch & Bound-Löser
4. OPBDP

Gescheiterte Lösungsansätze

Was hat alles nicht funktioniert?

1. Endliche Automaten
2. Basisreduktion
3. Modifikation bestehender Branch & Bound-Löser
4. OPBDP



Gescheiterte Lösungsansätze

Was hat alles nicht funktioniert?

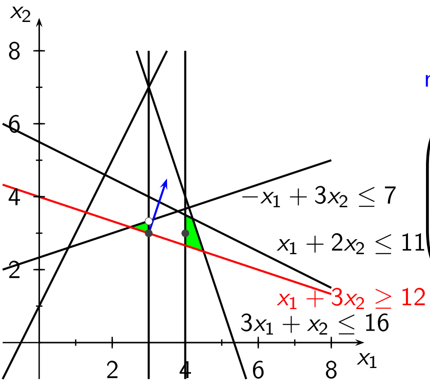
1. Endliche Automaten
2. Basisreduktion
3. Modifikation bestehender Branch & Bound-Löser
4. OPBDP

- Gitter aller Lösungen des Gleichungssystems
- Nichtnegativität erfordert Ungleichungen
- Vorher m Gleichungen mit n Variablen
- Hinterher n Ungleichungen mit $n - m$ Variablen

Gescheiterte Lösungsansätze

Was hat alles nicht funktioniert?

1. Endliche Automaten
2. Basisreduktion
3. Modifikation bestehender Branch & Bound-Löser
4. OPBDP



$$\max \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 16 \\ 11 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gescheiterte Lösungsansätze

Was hat alles nicht funktioniert?

1. Endliche Automaten
2. Basisreduktion
3. Modifikation bestehender Branch & Bound-Löser
4. OPBDP

Davis-Putnam:	Schließungsalgorithmus aus der Aussagenlogik
Pseudo-Boolean:	Ganzzahlige lineare Ungleichungen
Binäre Variablen:	für allgemeine Variable x: $x = x_0 + 2x_1 + 4x_2 + \cdots + 2^k x_k$
Optimierung:	Effizient durch Bounding

Struktur der Lösung

Getrennte Programme für unterschiedliche Aufgaben:

1. Probleminstanz einlesen und als IP formulieren
2. Aufzählen aller Lösungen zu einem IP
3. Problemspezifische Formatierung der Ausgabe

Beispiel

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	Ziel
q_1	1	0	0	1	0	$= 1$
q_2	0	1	0	1	0	$= 1$
q_3	0	0	1	1	0	$= 1$
q_4	1	1	1	2	1	$= 0 \pmod 2$
q_γ	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	kein einzelner Bruch

Modulo-Arithmetik

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \pmod 2 \end{pmatrix}$$

$$x_i \in \mathbb{N}$$

Modulo-Arithmetik

$$a = b \pmod{m} \quad \longrightarrow \quad a + mk = b \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \pmod{2} \end{pmatrix}$$

$$x_i \in \mathbb{N}$$

Modulo-Arithmetik

$$a = b \pmod{m} \quad \longrightarrow \quad a + mk = b \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \quad \cancel{\pmod{2}} \end{pmatrix}$$

$$x_i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$$

Gleichungen

$$
\begin{array}{rcccccccl}
1 \leq & 1\,x_1 & & & +1\,x_4 & & & \leq 1 \\
1 \leq & & 1\,x_2 & & +1\,x_4 & & & \leq 1 \\
1 \leq & & & 1\,x_3 & +1\,x_4 & & & \leq 1 \\
0 \leq & 1\,x_1 & +1\,x_2 & +1\,x_3 & +2\,x_4 & +1\,x_5 & +2\,k & \leq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rclcl}
0 \leq & x_i & \leq \infty & \qquad & x_i \in \mathbb{Z} \\
-\infty \leq & k & \leq \infty & \qquad & k \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$

Spezialfall Gamma

$$n_\gamma = \begin{cases} 0 & \text{für } q_\gamma = 0 \\ 1 & \text{für } q_\gamma \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \\ 2 & \text{für } q_\gamma \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -2x_\gamma + \sum_a n_\gamma^{(a)} &\geq 0 \\ -\infty x_\gamma + \sum_a n_\gamma^{(a)} &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rlllllll} 1 \leq & 1\,x_1 & & & +1\,x_4 & & & \leq 1 \\ 1 \leq & & 1\,x_2 & & +1\,x_4 & & & \leq 1 \\ 1 \leq & & & 1\,x_3 & +1\,x_4 & & & \leq 1 \\ 0 \leq & 1\,x_1 & +1\,x_2 & +1\,x_3 & +2\,x_4 & +1\,x_5 & +2\,k & \leq 0 \\ 0 \leq & & & & 1\,x_4 & +2\,x_5 & -2\,x_\gamma & \leq \infty \\ -\infty \leq & & & & 1\,x_4 & +2\,x_5 & -\infty\,x_\gamma & \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} 0 \leq & x_i & \leq \infty & \quad & x_i \in \mathbb{Z} \\ -\infty \leq & k & \leq \infty & \quad & k \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq & x_\gamma & \leq 1 & \quad & x_\gamma \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Differenzvektoren

$$\begin{array}{rlllllllr}
1 \leq & 1\,x_1 & & & +1\,x_4 & & & & \leq 1 \\
1 \leq & & 1\,x_2 & & +1\,x_4 & & & & \leq 1 \\
1 \leq & & & 1\,x_3 & +1\,x_4 & & & & \leq 1 \\
0 \leq & 1\,x_1 & +\,1\,x_2 & +\,1\,x_3 & +2\,x_4 & +1\,x_5 & +2\,k & & \leq 0 \\
0 \leq & & & & 1\,x_4 & +2\,x_5 & & -2\,x_\gamma & \leq \infty \\
-\infty \leq & & & & 1\,x_4 & +2\,x_5 & & -\infty\,x_\gamma & \leq 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl}
0 \leq & x_i & \leq \infty & \qquad & x_i \in \mathbb{Z} \\
-\infty \leq & k & \leq \infty & & k \in \mathbb{Z} \\
0 \leq & x_\gamma & \leq 1 & & x_\gamma \in \mathbb{Z}
\end{array}$$

Differenzvektoren

$$
\begin{array}{rlllllllll}
1 \leq & 1\,x_1 & -1\,x_2 & -1\,x_3 & +1\,x_4 & & & & \leq 1 \\
1 \leq & & 1\,x_2 & & +1\,x_4 & & & & \leq 1 \\
1 \leq & & & 1\,x_3 & +1\,x_4 & & & & \leq 1 \\
0 \leq & 1\,x_1 & \cancel{+1\,x_2} & \cancel{+1\,x_3} & +2\,x_4 & +1\,x_5 & +2\,k & & \leq 0 \\
0 \leq & & & & 1\,x_4 & +2\,x_5 & & -2\,x_\gamma & \leq \infty \\
-\infty \leq & & & & 1\,x_4 & +2\,x_5 & & -\infty\,x_\gamma & \leq 0 \\
0 \leq & 1\,x_1 & -1\,x_2 & -1\,x_3 & & & & & \leq \infty
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rclcr}
0 \leq & x_i & \leq \infty & \qquad & x_i \in \mathbb{Z} \\
-\infty \leq & k & \leq \infty & \qquad & k \in \mathbb{Z} \\
0 \leq & x_\gamma & \leq 1 & \qquad & x_\gamma \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$

Differenzvektoren

$$
\begin{array}{rlllllllr}
1 \leq & 1\,x_1 & -1\,x_2 & -1\,x_3 & +1\,x_4 & & & & \leq 1 \\
1 \leq & & 1\,x_2 & & +1\,x_4 & & & & \leq 1 \\
1 \leq & & & 1\,x_3 & +1\,x_4 & & & & \leq 1 \\
0 \leq & 1\,x_1 & & & +2\,x_4 & +1\,x_5 & +2\,k & & \leq 0 \\
0 \leq & & & & 1\,x_4 & +2\,x_5 & & -2\,x_\gamma & \leq \infty \\
-\infty \leq & & & & 1\,x_4 & +2\,x_5 & & -\infty\,x_\gamma & \leq 0 \\
0 \leq & 1\,x_1 & -1\,x_2 & -1\,x_3 & & & & & \leq \infty
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rclcl}
0 \leq & x_i & \leq \infty & \qquad & x_i \in \mathbb{Z} \\
-\infty \leq & k & \leq \infty & & k \in \mathbb{Z} \\
0 \leq & x_\gamma & \leq 1 & & x_\gamma \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$

Vektorenzahl

$$
\begin{array}{rlllllllll}
1 \leq & 1\,x_1 & & & +1\,x_4 & +1\,x_5 & & & \leq 10 \\
1 \leq & 1\,x_1 & -1\,x_2 & -1\,x_3 & +1\,x_4 & & & & \leq 1 \\
1 \leq & & 1\,x_2 & & +1\,x_4 & & & & \leq 1 \\
1 \leq & & & 1\,x_3 & +1\,x_4 & & & & \leq 1 \\
0 \leq & 1\,x_1 & & & +2\,x_4 & +1\,x_5 & +2\,k & & \leq 0 \\
0 \leq & & & & 1\,x_4 & +2\,x_5 & & -2\,x_\gamma & \leq \infty \\
-\infty \leq & & & & 1\,x_4 & +2\,x_5 & & -20\,x_\gamma & \leq 0 \\
0 \leq & 1\,x_1 & -1\,x_2 & -1\,x_3 & & & & & \leq \infty
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccl}
0 \leq & x_i & \leq \infty & \qquad & x_i \in \mathbb{Z} \\
-\infty \leq & k & \leq \infty & \qquad & k \in \mathbb{Z} \\
0 \leq & x_\gamma & \leq 1 & \qquad & x_\gamma \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$

Branch & Enumerate

`bande`: Allgemeines Programm zum Auflisten aller Lösungen eines beschränkten ganzzahligen linearen Programms.

Zweig abbrechen	falls LP-Relaxation unerfüllbar,
Lösung merken	wenn alle Variablen fixiert sind, sonst
verzweigen	an einer geeignet gewählten Variable durch Ändern der Schranken dieser Variable.

Ausblick

- Andere LP-Löser
- Bessere Heuristiken
- Problemspezifische Optimierung
- Verteilte Berechning (z.B. BOINC)